

# 1 Zagadnienie interpolacyjne

## 1.1 Sformułowanie problemu

Zadaniem, jakie należy rozwiązać jest interpolacja funkcji, zadanej zbiorem  $n$  punktów:  $(x_i, f(x_i))$ ,  $x_1 < x_i < x_n$ . Należy napisać program numeryczny, który na podstawie podanego zbioru punktów oblicza poprzez interpolację przybliżone wartości funkcji. Działanie programu przetestować należy dla funkcji  $f(x) = \sqrt{x}$ .

## 1.2 Rozwiązanie

Rozwiązaniem podanego wyżej problemu jest zastosowanie wielomianu interpolacyjnego stopnia co najwyżej  $n$ . W programie należy wykorzystać tzw. postać Lagrange'a:

$$W_n(x) = \sum_{i=0}^n \left[ f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right] \quad (1)$$

gdzie:

$x_i, x_j$  – wartości argumentów funkcji w punktach węzłowych,  
 $x$  – argument, dla którego obliczana jest przybliżona wartość funkcji  $f(x)$ .

## 1.3 Wyprowadzenie

Interpolacją nazywamy wyznaczenie przybliżonej wartości funkcji  $f(x)$  :  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  w dowolnym punkcie  $x \in [a, b]$  na podstawie znanych wartości funkcji w ustalonych punktach  $x_i$ :  $f(x_0), \dots, f(x_i), \dots, f(x_n)$ . Funkcja interpolująca  $F(x)$  musi spełniać następującą własność:

$$F(x_i) = f(x_i) = y_i \quad (2)$$

Najczęściej stosowanym rozwiązaniem jest wykorzystanie jako funkcji interpolującej wielomianu  $W_n(x)$ , którego stopień wynosi co najwyżej  $n$ . Można udowodnić, że istnieje dokładnie jeden wielomian interpolacyjny  $W_n(x)$ , który w punktach  $x_0, \dots, x_n$  przyjmuje wartości  $y_0, \dots, y_n$ .

Wyprowadzenie równania (1) przeprowadza się poprzez konstruowanie tzw. wielomianów pomocniczych  $W_n^i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Każdy z wielomianów pomocniczych jest stopnia co najwyżej  $n$ . Wielomiany te przyjmują wartość 0 w punktach  $x_j$  dla  $j \neq i$  oraz 1 w punkcie  $x_i$ :

$$W_n^i(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} \quad (3)$$

Wygodnie jest zapisać równanie (3) w bardziej zwartej postaci:

$$W_n^i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (4)$$

Ze względu na podane wyżej własności, wielomian taki posiada następującą cechę:

$$y_i = W_n^i(x_i) y_i \quad (5)$$

Poprzez zsumowanie tak skonstruowanych wielomianów otrzymujemy również wielomian stopnia co najwyżej  $n$ , dodatkowo spełniający warunki stawiane funkcji interpolującej:

$$W_n(x) = \sum_{i=0}^n W_n^i(x) y_i \quad (6)$$

Podstawiając do równania (6) równanie (4) otrzymujemy:

$$W_n(x) = \sum_{i=0}^n \left[ f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right] \quad (7)$$

## 1.4 Rozwiązanie algorytmiczne

Dla realizacji podanego powyżej schematu obliczeniowego (1) zastosować można następujący algorytm:

```

1  Wn = 0.0;
2  dla i := 1 do n wykonuj
3  rozpocznij
4      p = 1.0;
5      dla j := 1 do n wykonuj
6      rozpocznij
7          jeżeli i <> j wtedy
8              p = p * (x - xj) / (xi - xj);
9      zakończ
10     Wn := Wn + yi * p;
11 zakończ

```

## 1.5 Przykłady

### Przykład 1 Obliczenie interpolowanej wartości $f(x) = \sqrt{x}$

Przyjmijmy 3 punkty interpolacyjne:

$$x_0 = (0, 0)$$

$$x_1 = (4, 2)$$

$$x_2 = (9, 3)$$

Dla  $x = 1$  wartość interpolowana wynosi 6.000000000e-01. Otrzymany wynik daleki jest od oczekiwanego. Dla poprawienia jakości przybliżenia zmniejszono odległość pomiędzy punktami skrajnymi:

$$x_0 = (0, 0)$$

$$x_1 = (0.5, 0.707106781)$$

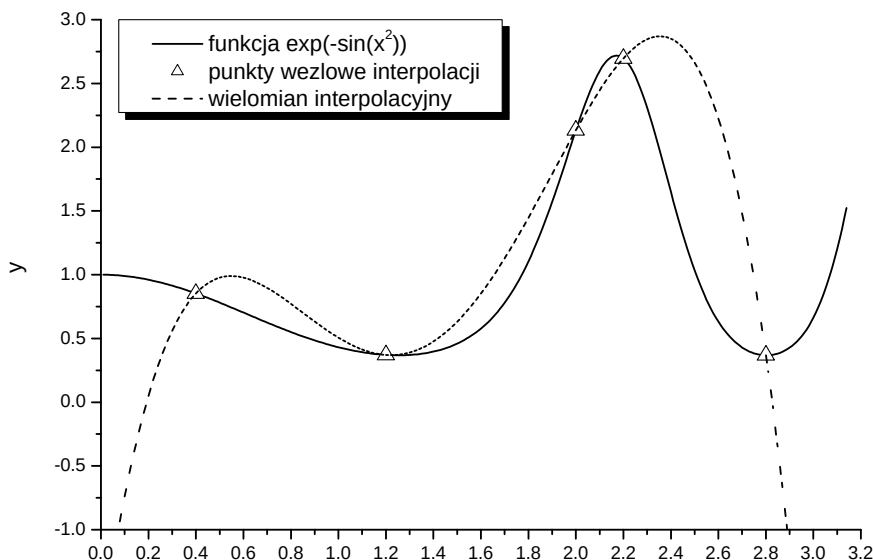
$$x_2 = (1.5, 1.224744871)$$

Wartość interpolowana dla  $x = 1$  wynosi 1.11535507e+00.

### Przykład 2 Przykład zastosowania interpolacji

Rysunek 1 przedstawia interpolację funkcji danej równaniem (8) za pomocą wielomianu stopnia czwartego.

$$f(x) = \exp(-\sin(x^2)) \quad (8)$$



Rysunek 1: Wykres funkcji  $f(x) = \exp(-\sin(x^2))$

Jak można zauważyć, różnice występujące pomiędzy „oryginalnymi” a interpolowanymi wartościami są znaczące. Podstawowym błędem jest tutaj

założenie, że za pomocą wielomianu interpolacyjnego można obliczyć cały zakres zmienności funkcji. Tymczasem interpolację stosuje się dla:

- niewielkich zakresów zmienności funkcji,
- niewielkich odległości pomiędzy punktami węzłowymi,
- lokalnie dostatecznie „gładkich” funkcji.

## 1.6 Uwagi

1. Jak zademonstrowano powyżej, interpolacja daje zadowalające wyniki (dla punktów innych niż węzłowe) tylko wtedy, gdy odległości pomiędzy punktami węzłowymi są stosunkowo niewielkie.
2. W przypadku użycia do interpolacji wielomianów wysokiego stopnia (w praktyce oznacza to stopień piąty i wyższe) kształt funkcji interpolującej pomiędzy punktami węzłowymi może mieć charakter oscylacji. Jest to efekt silnie niepożądany.
3. Z powodów przedstawionych w punktach 1 i 2 do opracowywania danych doświadczalnych stosuje się zazwyczaj aproksymację (a nie interpolację).
4. Interpolacja znajduje jednak bardzo duże zastosowanie w analizie różnego rodzaju zagadnień teoretycznych z zakresu metod numerycznych. Wykorzystuje się ją m.in. przy wyprowadzaniu wzorów na numeryczne całkowanie i różniczkowanie oraz przy konstrukcji schematów rozwiązywania równań różniczkowych.