

1 Obliczanie pierwiastka dowolnego stopnia

1.1 Sformułowanie problemu

Zadaniem, które należy rozwiązać jest numeryczne obliczenie pierwiastka dowolnego stopnia z liczby nieujemnej:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[m]{a} & (a \in \mathcal{R}^+, m \in \mathcal{N}) \\ &\Updownarrow \\ x^m &= a \end{aligned} \quad (1)$$

1.2 Rozwiązanie

Rozwiązanie powyższego problemu przeprowadzić można za pomocą następującego schematu iteracyjnego:

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_j &= \frac{1}{m} \left[(m-1)x_{j-1} + \frac{a}{(x_{j-1})^{m-1}} \right] \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

1.3 Wyprowadzenie

Niech

$$F(x) \equiv x^m - a \quad (3)$$

Poszukujemy x^* takiego, że $F(x^*) = 0$. Dla x^* spełnione jest więc tożsamościowo:

$$(x^*)^m - a = 0 \Rightarrow x^* = \sqrt[m]{a} \quad (4)$$

Niech x_{j-1} będzie przybliżoną wartością x^* . Wówczas w otoczeniu x_{j-1} można funkcję $F(x)$ można rozwinąć w następujący szereg:

$$F(x) = F(x_{j-1}) + \frac{dF}{dx}(x_{j-1})(x - x_{j-1}) + R \quad (5)$$

gdzie R - wyrazy wyższego rzędu. Jeżeli pominiemy człon R równania (5) to wówczas zachodzi, że:

$$F(x^*) \approx F(x_{j-1}) + \frac{dF}{dx}(x_{j-1})(x^* - x_{j-1}) \quad (6)$$

Pamiętając, że $F(x^*) = 0$ otrzymujemy nowe przybliżenie dla x_j :

$$0 = F(x_{j-1}) + \frac{dF}{dx}(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}) \quad (7)$$

Drogą trywialnego przekształcenia otrzymujemy:

$$\frac{-F(x_{j-1})}{\frac{dF}{dx}(x_{j-1})} = x_j - x_{j-1} \quad (8)$$

$$x_j = x_{j-1} - \frac{-F(x_{j-1})}{\frac{dF}{dx}(x_{j-1})} \quad (9)$$

Z elementarnej analizy matematycznej wiemy, że pochodna funkcji $F(x)$ danej równaniem (3) wyraża się następująco:

$$\frac{dF}{dx} = mx^{m-1} \quad (10)$$

Podstawiając x_{j-1} do równań (3), (10) i (9) otrzymujemy kolejno:

$$F(x_{j-1}) = (x_{j-1})^m - a \quad (11)$$

$$\frac{dF}{dx}(x_{j-1}) = m(x_{j-1})^{m-1} \quad (12)$$

$$x_j = x_{j-1} - \frac{(x_{j-1})^m - a}{m(x_{j-1})^{m-1}} \quad (13)$$

Ostatnie wyrażenie można uprościć, stosując następujące przekształcenie:

$$\begin{aligned} x_{j-1} - \frac{(x_{j-1})^m - a}{m(x_{j-1})^{m-1}} &= x_{j-1} - \frac{1}{m} * \underbrace{\frac{x_{j-1}^m}{(x_{j-1})^{m-1}}}_{x_{j-1}} + \frac{a}{m(x_{j-1})^{m-1}} = \\ &= \frac{1}{m} \left[(m-1)x_{j-1} + \frac{a}{(x_{j-1})^{m-1}} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

1.4 Rozwiązanie algorytmiczne

Dla realizacji podanego powyżej schematu obliczeniowego (2) zastosować można następujący algorytm:

```

1  xp := a;
2  dla i := 1 do n_krokov wykonuj
3  rozpocznij
4      xp := ( (m - 1.0) * xp + a / (pow(xp, m-1) ) ) / m;
5  zakoncz
```

1.5 Przykłady

Przykład 1 Obliczanie pierwiastka kwadratowego z 4.0

Zgodnie ze schematem obliczeniowym danym równaniem (2) podstawiamy $x_0 = 4.00$ Równanie opisujące j -te przybliżenie rozwiązania przyjmuje postać:

$$x_j = 0.5 \left(x_{j-1} + \frac{4.00}{x_{j-1}} \right)$$

Poniżej zestawiono wyniki pierwszych 6 kroków metody.

$x_0 =$	4.0000000000e+000	$\rightarrow$	2.5000000000e+000
$x_1 =$	2.5000000000e+000	$\rightarrow$	2.0500000000e+000
$x_2 =$	2.0500000000e+000	$\rightarrow$	2.0006097561e+000
$x_3 =$	2.0006097561e+000	$\rightarrow$	2.0000000929e+000
$x_4 =$	2.0000000929e+000	$\rightarrow$	2.0000000000e+000
$x_5 =$	2.0000000000e+000	$\rightarrow$	2.0000000000e+000

Przykład 2 Obliczanie pierwiastka kwadratowego z 2.0

Zgodnie ze schematem obliczeniowym danym równaniem (2) podstawiamy $x_0 = 2.00$ Równanie opisujące j -te przybliżenie rozwiązania przyjmuje postać:

$$x_j = 0.5 \left(x_{j-1} + \frac{2.00}{x_{j-1}} \right)$$

Poniżej zestawiono wyniki pierwszych 5 kroków metody.

$x_0 =$	2.0000000000e+000	$\rightarrow$	1.5000000000e+000
$x_1 =$	1.5000000000e+000	$\rightarrow$	1.4166666667e+000
$x_2 =$	1.4166666667e+000	$\rightarrow$	1.4142156863e+000
$x_3 =$	1.4142156863e+000	$\rightarrow$	1.4142135624e+000
$x_4 =$	1.4142135624e+000	$\rightarrow$	1.4142135624e+000

Przykład 3 Obliczanie pierwiastka stopnia 7 z 3 ($\sqrt[7]{3}$)

Poniżej zestawiono wyniki pierwszych 11 kroków metody.

$x_0 =$	3.0000000000e+000	$\rightarrow$	2.5720164609e+000
$x_1 =$	2.5720164609e+000	$\rightarrow$	2.2060659436e+000
$x_2 =$	2.2060659436e+000	$\rightarrow$	1.8946316907e+000
$x_3 =$	1.8946316907e+000	$\rightarrow$	1.6332356394e+000
$x_4 =$	1.6332356394e+000	$\rightarrow$	1.4224965841e+000
$x_5 =$	1.4224965841e+000	$\rightarrow$	1.2710096113e+000
$x_6 =$	1.2710096113e+000	$\rightarrow$	1.1910921519e+000
$x_7 =$	1.1910921519e+000	$\rightarrow$	1.1710258809e+000
$x_8 =$	1.1710258809e+000	$\rightarrow$	1.1699338801e+000
$x_9 =$	1.1699338801e+000	$\rightarrow$	1.1699308128e+000
$x_{10} =$	1.1699308128e+000	$\rightarrow$	1.1699308128e+000