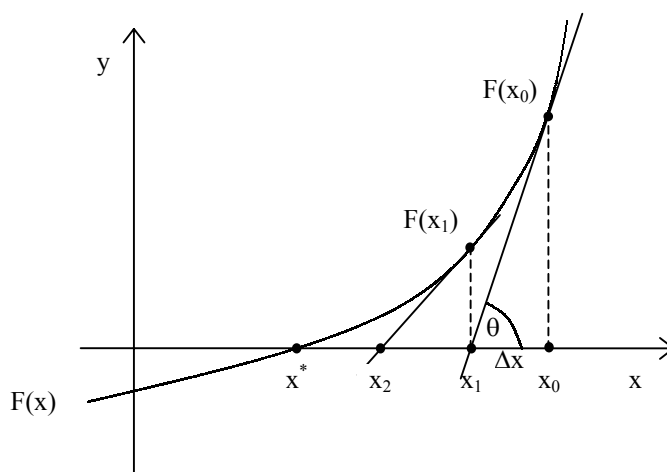


RÓWNANIA NIELINIOWE

Równania nieliniowe można rozwiązywać różnymi metodami. Jedną z nich jest *metoda Newtona* znana również w literaturze pod nazwą *metody stycznej*.

I. METODA NEWTONA

W metodzie Newtona wykorzystujemy definicję pochodnej. Jej graficzna interpretacja została przedstawiona na Rys. 1. *Metoda Newtona* jest metodą iteracyjną, w której krok Δx przybliżający rozwiązanie x^* jest uzależniony wprost od pochodnej funkcji. Metoda iteracyjna polega na założeniu punktu startowego x_0 (pierwszego przybliżenia rozwiązania x^*), który posłuży do wyznaczenia w kolejnych iteracjach następnych punktów $x_1, x_2, x_3, \dots$ coraz bliższych rozwiązaniu.



Rys. 1 Graficzna interpretacja metody Newtona.

Pochodną funkcji w punkcie x_0 w interpretacji graficznej można zapisać jako tg kąta θ .

$$F'(x_0) = \operatorname{tg} \theta \quad (1.1)$$

gdzie zgodnie z definicją funkcji tg

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{F(x_0)}{\Delta x} \quad (1.2)$$

Z Rys. 1 wynika

$$\Delta x = x_0 - x_1 \quad (1.3)$$

Zatem po przekształceniu otrzymuje się

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} \quad (1.4)$$

Uogólniając zapis 1.4 można uzyskać wyrażenie pozwalające w kolejnych iteracjach wyznaczać coraz dokładniejsze przybliżenia rozwiązania x^* .

$$x_j = x_{j-1} - \frac{F(x_{j-1})}{F'(x_{j-1})} \quad (1.5)$$

Wzór (1.5) można również otrzymać z szeregu Taylora. Niech x_{j-1} będzie przybliżoną wartością x^* . W otoczeniu x_{j-1} , funkcję $F(x)$ można rozwinąć w następujący szereg:

$$F(x) = F(x_{j-1}) + \frac{dF}{dx}(x_{j-1}) \cdot (x - x_{j-1}) + \text{wyrazy wyższego rzędu } (x - x_{j-1}) \quad (1.6)$$

Jeżeli wyrazy wyższego rzędu zostaną pominięte, a za x zostanie podstawiona niewiadoma x^* to szereg (1.6) przyjmie postać:

$$F(x^*) = F(x_{j-1}) + \frac{dF}{dx}(x_{j-1}) \cdot (x^* - x_{j-1}) \quad (1.7)$$

Uwzględniając fakt, że $F(x^*) = 0$ i przekształcając wyrażenie (1.7) otrzymuje się:

$$x^* = x_{j-1} - \frac{F(x_{j-1})}{F'(x_{j-1})} \quad (1.8)$$

Jeżeli wartość x_{j-1} znacząco różni się od faktycznej wartości x^* wówczas należy zastosować procedurę iteracyjną. W każdej kolejnej iteracji będzie wyznaczona nowa wartość x_j stanowiąca nowe przybliżenie rozwiązania x^* . Zatem w ten sposób można uzyskać wyrażenie (1.5).

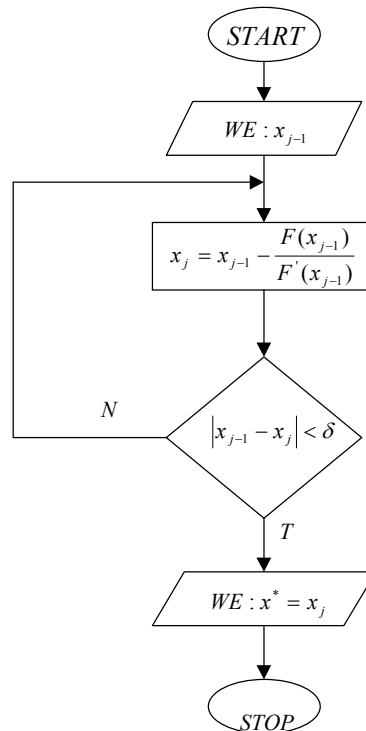
$$x_j = x_{j-1} - \frac{F(x_{j-1})}{F'(x_{j-1})}$$

Początek obliczeń wymaga założenia startowej wartości x_0 stanowiącej podstawę do wyznaczenia w kolejnych iteracjach następnych wartości $x_1, x_2, x_3, \dots$. Jeżeli funkcja $F(x)$ nie posiada punktów przegięcia w otoczeniu punktu x^* (pomiędzy punktami x_0 i x^*) wówczas wzór (1.5) pozwala na wyznaczenie w kolejnych iteracjach nowych wartości x_j , z których każda następna ma wartość coraz mniej różniącą się od wartości x^* . Warunek nie podejmowania kolejnych iteracji tzw. *warunek stopu* może zostać zdefiniowany następująco:

$$|x_j - x_{j-1}| < \delta \quad (1.9)$$

Istotnym zagadnieniem w zastosowaniu *metody Newtona* jest wyznaczenie wartości pochodnej funkcji. Zagadnienie to będzie dokładnie omówione w rozdziale „Różniczkowanie numeryczne”.

Na Rys. 2 został przedstawiony algorytm programu rozwiązującego równanie *metodą Newtona*.



Rys. 2 Algorytm programu rozwiązującego równanie *metodą Newtona*.

Zadanie.**Zastosowanie metody Newtona do obliczenia wartości pierwiastka.**

Zadanie polega na wyznaczeniu wartości pierwiastka stopnia m z liczby a .

$$x^* = \sqrt[m]{a} \quad a > 0, m \in \mathbb{N} \quad (1.10)$$

Przekształcając wzór (1.10) można zdefiniować funkcję $F(x)$.

$$F(x) = x^m - a$$

Po podstawieniu jej do wzoru (1.5) otrzymano:

$$x_j = x_{j-1} - \frac{x_{j-1}^m - a}{m \cdot x_{j-1}^{m-1}} \quad (1.11)$$

Wzór (1.11) można przekształcić do następującej postaci:

$$x_j = \frac{1}{m} \left[(m-1) \cdot x_{j-1} + \frac{a}{x_{j-1}^{m-1}} \right]$$

W algorytmie założono następującą wartość pierwszego przybliżenia:

$$x_0 = a$$

Dla przykładu zostanie wyznaczona w sposób numeryczny wartość $\sqrt[3]{2}$.

$x_0 = 2.00000$ wartość pierwszego przybliżenia

$x_1 = 1.50000$ I iteracja

$x_2 = 0.14167$ II iteracja

$x_3 = 0.14142$ III iteracja

Wartość pierwiastka została wyznaczona z dostateczną dokładnością w trzeciej iteracji.