

ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH

Równania różniczkowe są to równania, które zawierają w swojej budowie pochodną. Równania te można podzielić ze względu na rodzaj pochodnej jaka w nich występuje. Jeżeli równanie zawiera pochodną funkcji jednej zmiennej wówczas nazywa się ona równaniem różniczkowym zwyczajnym. Występowanie pochodnych cząstkowych wskazuje na równanie różniczkowe cząstkowe. Równania różniczkowe możemy rozwiązywać drogą analityczną lub numeryczną. Analitycznym rozwiązaniem równania różniczkowego jest postać analityczna szukanej funkcji. Numerycznym rozwiązaniem równania różniczkowego jest zbiór punktów, których współrzędne spełnia szukaną funkcję.

Aby rozwiązać równanie różniczkowe zwyczajne zapisane w postaci (3.1) należy znać warunek początkowy (3.2)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{lub} \quad y' = f(x, y) \quad (3.1)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (3.2)$$

Rozwiązaniem równania różniczkowego zwyczajnego (3.1) jest funkcją $y(x)$. Poniżej dla przykładu przedstawiono dwa równania różniczkowe z warunkami początkowymi oraz analityczne rozwiązanie tych równań

$$\frac{dy}{dx} = x \quad y(0) = 1 \quad (\text{rozw. analityczne} \quad y(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = y \quad y(0) = 5 \quad (\text{rozw. analityczne} \quad y(x) = 5e^x)$$

W dalszej części zostaną przedstawione trzy metody numeryczne służące do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych. Pierwsza z nich ma charakter poglądowy, natomiast dwie kolejne są stosowane w praktyce. W rozważaniach przyjęto następujące oznaczenia:

$y(x_0)=y_0$	- warunek początkowy
h	- krok
x_i	- wartość zmiennej niezależnej w punkcie i
$x_{i+1}=x_i+h$	- wartość zmiennej niezależnej w punkcie $i+1$
y_i	- wartość szukanej funkcji w punkcie x_i
y_{i+1}	- wartość szukanej funkcji w punkcie x_{i+1}

1. Metoda Eulera

Metoda Eulera można zastosować wykorzystując tzw. *schemat jawny* lub *schemat niejawny*. Różnica polega na tym, że w *schemacie jawnym* wykorzystuje się iloraz różnicowy przedni (*progresywny*), natomiast w *schemacie niejawnym* iloraz różnicowy wsteczny (*regresywny*).

a) *Schemat jawny*. Iloraz różnicowy przedni (3.3)

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \quad (3.3)$$

należy przekształcić do następującej postaci:

$$y(x+h) = y(x) + y'(x) \cdot h$$

Jeżeli jest znany warunek początkowy, tzn. wartość $y'_i = y(x_i)$ dla pewnego punktu x_i , to można obliczyć dalsze wartości y_{i+1} (dla kolejnych punktów $x_{i+1}=x_i+h$) wg schematu:

$$y_{i+1} = y_i + f'(x_i, y_i) \cdot h \quad - \text{metoda jawna} \quad (3.4)$$

b) *Schemat niejawny*. Iloraz Różnicowy wsteczny (3.5)

$$y'(x) = \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \quad (3.5)$$

można przekształcić na warunkach jednoznaczności do postaci (3.6)

$$y'(x+h) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \quad (3.6)$$

Postać (3.6) należy przekształcić następująco:

$$y(x+h) = y(x) + y'(x+h) \cdot h$$

aby w rezultacie otrzymać uogólnione rozwiązanie

$$y_{i+1} = y_i + f'(x_{i+1}, y_{i+1}) \cdot h \quad - \text{metoda niejawna (uwikłana)} \quad (3.7)$$

Różnica pomiędzy *schematem jawnym* i *schematem niejawnym* polega na różnej zbieżności rozwiązania. W *schemacie niejawnym* rozwiązanie zachowuje sens dla dowolnej wartości kroku h . Natomiast w *schemacie jawnym* krok h musi mieć wartość pochodzącą z ściśle określonego zakresu.

Przykład 1

Należy rozwiązać metodą Eulera następujące równanie różniczkowe zwyczajne wykorzystując dla porównania *schemat jawny* oraz *schemat niejawny*,

$$\frac{dy}{dx} - 2y \quad \text{warunek początkowy} \quad y(0) = 20$$

rozwiązanie analityczne:

$$y(x) = 20 \cdot e^{-2x}$$

a) *Schemat jawny*. Iloraz różnicowy przedni

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

należy podstawić do równania w miejsce pochodnej.

$$y'(x) = -2y(x)$$

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = -2y(x)$$

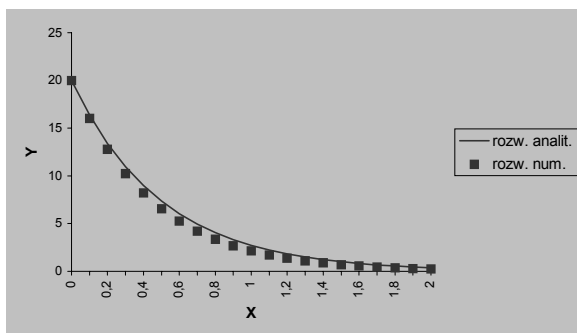
Należy tak przekształcić równanie by obliczyć $y(x+h)$.

$$y(x+h) = y(x)(1-2h)$$

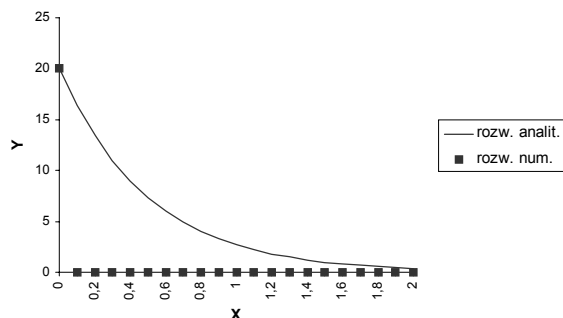
czyli ostatecznie

$$y_{i+1} = y_i (1-2h)$$

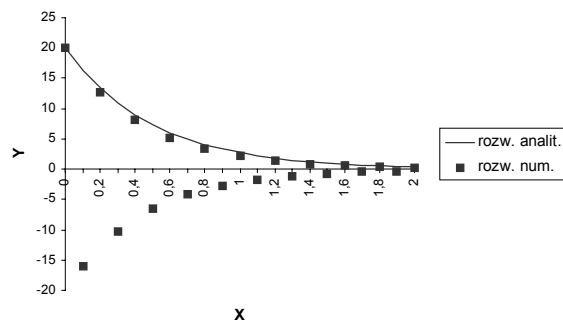
Wartość kroku powinna być w zakresie $0 < h < 0.5$. Zakres ten został dobrany doświadczalnie. Poniżej zamieszczono różne przypadki rozwiązania dla różnych wartości kroku h .



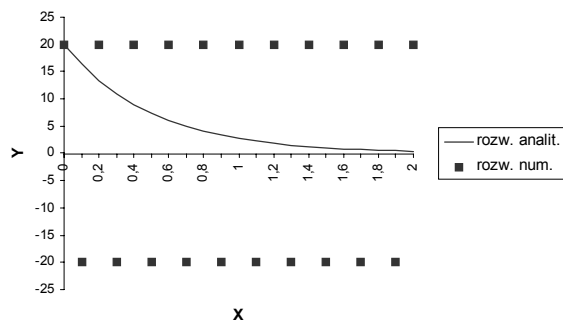
Wartość kroku – $0 < h < 0,5$ – wartość prawidłowa



Wartość kroku - $h = 0,5$ - wartość niepoprawna



Wartość kroku - $0,5 < h < 1,0$ - wartość niepoprawna



Wartość kroku - $h = 1$ - wartość niepoprawna

Wartość kroku h w zakresie $0,5 < h < 1$ jest niepoprawny ale błąd pozostaje lokalny. W pewnych sytuacjach możemy to dopuścić.

b) *Schemat niejawny.*

$$y'(x) = \frac{y(x) - y(x-h)}{h}$$

$$y'(x+h) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

$$\frac{dy}{dx} = -2y \quad y'(x) = -2y(x) \quad y'(x+h) = -2y(x+h)$$

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = 2y(x+h)$$

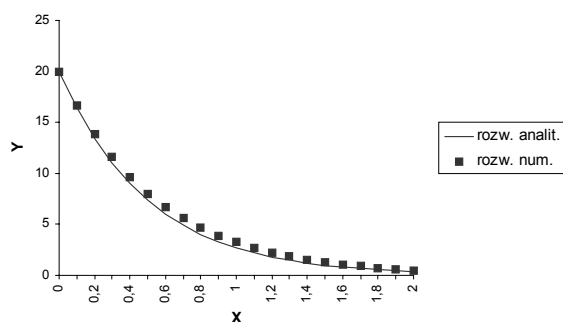
Ostatnie równanie należy rozwiązać względem $y(x+h)$

$$y(x+h) = \frac{y(x)}{1+2h}$$

Czyli ostatecznie .

$$y_{i+1} = \frac{y_i}{1+2h}$$

Równanie zachowuje sens dla dowolnej wartości kroku h . Optymalizacja tej wartości prowadzi do poprawienia dokładności.



Wartość kroku - $h = 0,1$

2. Zmodyfikowana metoda Eulera.

Zmodyfikowana metoda Eulera została tak skonstruowana, aby uzyskać lepszą stabilność rozwiązania. Metodę tę można wyprowadzić wychodząc od symbolicznej postaci równania różniczkowego.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{warunek początkowy } y(x_0) = y_0 \quad (3.8)$$

Równanie (3.8) należy obustronnie scałkować.

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \frac{dy}{dx} = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y(x)) dx$$

wykorzystując *metodę trapezów*.

$$y(x_0 + h) - y(x_0) = \frac{h}{2} (f(x_0, y(x_0)) + f(x_0 + h, y(x_0 + h))) \quad (3.9)$$

Wzór (3.9) przekształcamy tak, aby uzyskać wartości szukanej funkcji $y(x_0 + h)$ w kolejnym kroku.

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + \frac{1}{2} (h \cdot f(x_0, y(x_0)) + h \cdot f(x_0 + h, y(x_0 + h)))$$

co w zapisie indeksowym wygląda następująco:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} (h \cdot f(x_i, y_i) + h \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1})) \quad (3.10)$$

Wzór (3.10) przedstawia uwikłany schemat rozwiązania. Aby przejść ze schematu niejawnego na schemat jawny należy zastosować następujące uproszczenie;

$$\frac{dy}{dx} \cong \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i) \quad (3.11)$$

Następnie wyrażenie (3.11) należy przekształcić i podstawić do wzoru (3.10).

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2} (h \cdot f(x_i, y_i) + h \cdot f(x_i, y_i + hf(x_i, y_i))) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Wzór (3.12) przedstawia jawny schemat rozwiązania, który można rozpisać na elementarne części

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(x_i, y_i) \\ k_2 &= h \cdot f(x_i + h, y_i + k_1) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2} (k_1 + k_2) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Wzory (3.13) prezentują *zmodyfikowaną metodę Eulera*. Znając (x_i, y_i) można obliczyć (x_{i+1}, y_{i+1}) .

Przykład 2

Należy rozwiązać następujące równanie różniczkowe zwyczajne, wykorzystując zmodyfikowaną metodę Eulera.

$$\frac{dy}{dx} = -2 \cdot x \cdot y \quad \text{warunek początkowy } y(0) = 1$$

Rozwiązanie analityczne :

$$y(x) = e^{-(x^2)}$$

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu przyjęto wartość kroku $h=0.1$. Poniżej przedstawiono schemat obliczeń wartości y_1 .

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1$$

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$$

$$k_1 = h \cdot f(x_0, y_0) = h \cdot (-2x_0 y_0) = 0.1(-2 \cdot 0 \cdot 1) = 0$$

$$k_2 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_1) = h(-2(x_0 + h)(y_0 + k_1)) = 0.1(-2 \cdot (0 + 0.1) \cdot (1 + 0)) = -0.02$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 1 + \frac{1}{2}(0 - 0.02) = 0.99$$

W Tabeli 1 podano wyniki obliczeń 10 wartości szukanej funkcji w przedziale $x \in < 0; 1 >$.

METODA EULERA - ZMODYFIKOWANA					
x		k1	k2		y
0,0					1,0000
0,1		0,0000	-0,0200		0,9900
0,2		-0,0198	-0,0388		0,9607
0,3		-0,0384	-0,0553		0,9138
0,4		-0,0548	-0,0687		0,8520
0,5		-0,0682	-0,0784		0,7788
0,6		-0,0779	-0,0841		0,6978
0,7		-0,0837	-0,0860		0,6129
0,8		-0,0858	-0,0843		0,5279
0,9		-0,0845	-0,0798		0,4457
1,0		-0,0802	-0,0731		0,3691

Tab. 1 Wyniki obliczeń wartości szukanej funkcji $y(x)$ dla $x \in < 0; 1 >$

3. Metoda Rungego – Kuty.

Metoda Rungego – Kuty jest metodą najczęściej stosowaną w praktyce. Można ją wyprowadzić wykorzystując do całkowania równania (3.8) prostą metodę Simpsona. Schemat metody Rungego –Kuty jest następujący:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= h \cdot f(x_i, y_i) \\
 k_2 &= h \cdot f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1) \\
 k_3 &= h \cdot f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2) \\
 k_4 &= h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3) \\
 y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Przykład 3

W przykładzie zostanie rozwiązane takie same równanie różniczkowe, jak w Przykładzie 1. Należy rozwiązać następujące równanie różniczkowe zwyczajne, wykorzystując metodę Rungego – Kuty.

$$\frac{dy}{dx} = -2xy \quad \text{warunek początkowy } y(0) = 1$$

Rozwiązanie analityczne

$$y(x) = e^{-(x^2)}$$

Rozwiązanie :

W rozwiązaniu przyjęto wartość kroku $h=0.1$. Poniżej przedstawiono schemat obliczeń wartości y_1 .

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1$$

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$$

$$k_1 = h \cdot f(x_0, y_0) = h \cdot (-2x_0 \cdot y_0) = 0.1(-2 \cdot 0 \cdot 1) = 0$$

$$\begin{aligned} k_2 &= h \cdot f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1\right) = h(-2(x_0 + \frac{1}{2}h)(y_0 + \frac{1}{2}k_1)) = \\ &= 0.1(-2(0 + \frac{1}{2}0.1)(1 + \frac{1}{2}0)) = -0.01 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= h \cdot f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2\right) = h(-2(x_0 + \frac{1}{2}h)(y_0 + \frac{1}{2}k_2)) = \\ &= 0.1(-2(0 + \frac{1}{2}0.1)(1 + \frac{1}{2}(-0.01))) = 0.0099 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3) = h(-2(x_0 + h)(y_0 + k_3)) = \\ &= 0.1(-2(0 + 0.1)(1 + 0.0099)) = -0.0198 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \\ &= 1 + \frac{1}{6}(0 + 2 \cdot (-0.01) + 2 \cdot 0.0099 + (-0.0198)) = 0.99 \end{aligned}$$

W Tabeli 2 podano wyniki obliczeń 10 wartości szukanej funkcji w przedziale $x \in < 0 ; 1 > .$

METODA RUNGEGO-KUTTY							
x		k1	k2	k3	k4		y
0,0							1,0000
0,1		0,0000	-0,0100	-0,0100	-0,0198		0,9900
0,2		-0,0198	-0,0294	-0,0293	-0,0384		0,9608
0,3		-0,0384	-0,0471	-0,0469	-0,0548		0,9139
0,4		-0,0548	-0,0621	-0,0618	-0,0682		0,8521
0,5		-0,0682	-0,0736	-0,0734	-0,0779		0,7788
0,6		-0,0779	-0,0814	-0,0812	-0,0837		0,6977
0,7		-0,0837	-0,0853	-0,0852	-0,0858		0,6126
0,8		-0,0858	-0,0855	-0,0855	-0,0843		0,5273
0,9		-0,0844	-0,0825	-0,0826	-0,0800		0,4449
1,0		-0,0801	-0,0769	-0,0772	-0,0735		0,3679

Tab. 2 Wyniki obliczeń wartości szukanej funkcji $y(x)$ dla $x \in < 0 ; 1 > .$

ROZWIĄZYWANIE UKŁADU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH

Układ równań różniczkowych zwyczajnych można zapisać symbolicznie w postaci przedstawionej poniżej:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (3.15)$$

warunek początkowy,

$$y_1(x_0) = y_{10}$$

$$y_2(x_0) = y_{20}$$

.....

$$y_n(x_0) = y_{n0}$$

Warunek początkowy podany w formie przedstawionej powyżej stanowi najprostszą formę jednoznacznego postawienia zadania. Rozwiązanie układu (3.15) można uzyskać stosując *metodę Eulera*. Jeżeli zostanie rozważony układ $n = 2$ równań różniczkowych zwyczajnych to rozwiązanie *metodą Eulera* schematem jawnym jest następujące:

$$n = 2$$

$$y_{1i+1} = y_{1i} + f_1(x_i, y_{1i}, y_{2i}) \cdot h \quad (3.16)$$

$$y_{2i+1} = y_{2i} + f_2(x_i, y_{1i}, y_{2i}) \cdot h$$

Schemat jawny oparty na progresywnym ilorazie różniczkowym jest łatwy do wyprowadzenia i nie stanowi żadnych problemów obliczeniowych.

$$n = 2$$

$$y_{1i+1} = y_{1i} + f_1(x_{i+1}, y_{1i+1}, y_{2i+1}) \cdot h \quad (3.17)$$

$$y_{2i+1} = y_{2i} + f_2(x_{i+1}, y_{1i+1}, y_{2i+1}) \cdot h$$

Schemat niejawny (3.17) stanowi w ogólnym przypadku układ równań nieliniowych z koniecznością użycia do rozwiązania na przykład *metody Newtona-Raphsona*. W prostszym przypadku jest to układ równań liniowych. Wówczas można użyć *metody eliminacji Gaussa*.

Przykład 4

Poniżej zostanie rozwiązany układ dwóch równań różniczkowych zwyczajnych.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = -4y_1 \end{cases}$$

warunek początkowy,

$$y_1(0) = 2$$

$$y_2(0) = 0$$

rozwiązanie analityczne,

$$y_1(x) = 2 \cos 2x$$

$$y_2(x) = -4 \sin 2x$$

a) Schemat jawny. W schemacie jawnym stosujemy bezpośrednio wzory (3.16).

$$y_{1i+1} = y_{1i} + y_{2i} \cdot h$$

$$y_{2i+1} = y_{2i} - 4y_{1i} \cdot h$$

Jeżeli założymy $h = 0.1$ i uwzględnimy warunek początkowy:

$$\begin{aligned} y_{10} &= 2 \\ y_{20} &= 0 \end{aligned} \quad \text{dla} \quad x_0 = 0$$

wówczas

$$\begin{aligned} y_{11} &= 2 + 0 \cdot 0.1 + 2 \\ y_{21} &= 0 - 4 \cdot 2 \cdot 0.1 = -0.8 \end{aligned}$$

b) Schemat niejawnym. W schemacie niejawnym należy wykorzystać iloraz różnicowy wsteczny:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= \frac{y_1(x) - y_1(x-h)}{h} \Rightarrow y_1'(x+h) = \frac{y_1(x+h) - y_1(x)}{h} \\ y_2'(x) &= \frac{y_2(x) - y_2(x-h)}{h} \Rightarrow y_2'(x+h) = \frac{y_2(x+h) - y_2(x)}{h} \end{aligned}$$

podstawiając go w miejsce pochodnych do równań różniczkowych.

$$\begin{aligned} \begin{cases} y_1'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = -4y_1(x) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y_1'(x+h) = y_2(x+h) \\ y_2'(x+h) = -4y_1(x+h) \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{y_1(x+h) - y_1(x)}{h} = y_2(x+h) \\ \frac{y_2(x+h) - y_2(x)}{h} = -4y_1(x+h) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y_1(x+h) - y_1(x) = hy_2(x+h) \\ y_2(x+h) - y_2(x) = -4hy_1(x+h) \end{cases} \end{aligned}$$

Tak uzyskaną postać układu równań różniczkowych można zapisać w postaci macierzowej,

$$\begin{aligned} \begin{cases} y_1(x+h) - hy_2(x+h) = y_1(x) \\ 4hy_1(x+h) + y_2(x+h) = y_2(x) \end{cases} \\ \begin{bmatrix} 1 & -h \\ 4h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1i+1} \\ y_{2i+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

W ten sposób układ dwóch równań różniczkowych zwyczajnych został zapisany w postaci układu równań liniowych. Jeżeli założymy $h = 0.1$ i uwzględnimy warunek początkowy:

$$\begin{aligned} y_{10} &= 2 \\ y_{20} &= 0 \end{aligned} \quad \text{dla} \quad x_0 = 0$$

wówczas rozwiązanie układu ,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pozwole na wyznaczenie wartości szukanych funkcji w punkcie x_0+h . Aby obliczyć kolejne wartości szukanych funkcji dla kolejnych wartości x należy dla każdej wartości x rozwiązać układ równań. Błąd otrzymanych wartości szacuje się ze wzoru:

$$m_o \cdot G_i - S_i$$

Poniżej dołączono obliczone wartości funkcji y_1 i y_2 dla kolejnych wartości x .

$$\begin{aligned} y_{11} &= 2.0000 & y_{12} &= 1.9200 & y_{13} &= 1.9232 & y_{14} &= 1.9231 \\ y_{21} &= -0.8000 & y_{22} &= -0.7680 & y_{23} &= -0.7693 & y_{24} &= -0.7692 \end{aligned}$$

Wnioski :

Metody Eulera prezentowane wyżej rzadko bywają stosowane w praktyce, gdyż nie są zbyt efektywne, tzn. wymagają stosowania dużo obliczeń do osiągnięcia wymaganej dokładności rozwiązania. Główną zaletą schematu jawnego jest bardzo prosty schemat obliczeniowy i z

tego powodu należy zawsze od niego zaczynać rozwiązanie zadania. Schemat uwikłany pomimo dużej złożoności algorytmów obliczeniowych (może być konieczne użycie w etapach pośrednich metody *Newtona-Raphsona* rozwiązywania układów równań nieliniowych) w pewnych sytuacjach może się okazać przydatniejszy od schematu jawnego. Obecnie najpopularniejszą metodą „pierwszego podejścia”, używaną do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych jest *metoda Rungego-Kutty* czwartego rzędu. Jest to metoda typu jawnego.