

Układ równań liniowych

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

.....

$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = b_n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

Zakładamy, że znamy macierz współczynników a_{ij} oraz wektor b_i . Poszukujemy wektora wartości x_i .

Dopuszczamy operacje elementarne.

- a) Pomnożenie wiersza przez stałą
- b) Podzielenie wiersza przez stałą
- c) Dodanie do pewnego wiersza innego wiersza
- d) Odejście od pewnego wiersza innego wiersza
- e) Zamiana wierszy miejscami

Dopuszczalne są także operacje kombinowane, z których szczególnie ważne jest odejście od pewnego wiersza innego wiersza przemnożonego przez stałą (czyli (a)+(b)).

Metoda eliminacji Gaussa.

Przykład [Fogiel]

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 16 \quad W_1^{(0)}$$

$$2x_1 - x_2 - 2x_3 = -6 \quad W_2^{(0)}$$

$$4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \quad W_3^{(0)}$$

Eliminacja zmiennych.

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 16$$

$$W_1^{(1)} = W_1^{(0)}$$

$$-5x_2 - 4x_3 = -22$$

$$W_2^{(1)} = W_2^{(0)} - W_1^{(0)}$$

$$-7x_2 - 6x_3 = -32$$

$$W_3^{(1)} = W_3^{(0)} - 2 W_1^{(0)}$$

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 16$$

$$W_1^{(2)} = W_1^{(1)}$$

$$-5x_2 - 4x_3 = -22$$

$$W_2^{(2)} = W_2^{(1)}$$

$$-\frac{2}{5}x_3 = -\frac{6}{5}$$

$$W_3^{(2)} = W_3^{(1)} - \frac{7}{5} W_2^{(1)}$$

Postępowanie odwrotne .

$$x_3 = \frac{-\frac{6}{5}}{-\frac{2}{5}} \Rightarrow x_3 = 3$$

$$x_2 = \frac{-1}{5}(-22 + 4 \cdot 3) \Rightarrow x_2 = 2$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(16 - 2 \cdot 3 - 4 \cdot 2) \Rightarrow x_1 = 1$$

Ogólne .

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1k}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \cdots & a_{2k}^{(0)} & \cdots & a_{2n}^{(0)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1}^{(0)} & a_{k2}^{(0)} & \cdots & a_{kk}^{(0)} & \cdots & a_{kn}^{(0)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \cdots & a_{nk}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_k \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(0)} \\ \cdots \\ b_k^{(0)} \\ \cdots \\ b_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

I. “Eliminacja zmiennych.

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2k}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{k2}^{(1)} & \cdots & a_{kk}^{(1)} & \cdots & a_{kn}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nk}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_k \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \cdots \\ b_k^{(1)} \\ \cdots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} W_1^{(1)} &= W_1^{(0)} \\ W_2^{(1)} &= W_2^{(0)} - \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \cdot W_1^{(0)} \\ &\cdots \\ W_k^{(1)} &= W_k^{(0)} - \frac{a_{k1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \cdot W_1^{(0)} \\ &\cdots \\ W_n^{(1)} &= W_n^{(0)} - \frac{a_{n1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \cdot W_1^{(0)} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \cdots & a_{1k}^{(k)} & \cdots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \cdots & a_{2k}^{(k)} & \cdots & a_{2n}^{(k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_k \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(k)} \\ b_2^{(k)} \\ \cdots \\ b_k^{(k)} \\ \cdots \\ b_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} W_1^{(k)} &= W_1^{(k-1)} \\ W_2^{(k)} &= W_2^{(k-1)} \\ &\cdots \\ W_k^{(k)} &= W_k^{(k-1)} \\ &\cdots \\ W_n^{(k)} &= W_n^{(k-1)} - \frac{a_{nk}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot W_k^{(k-1)} \end{aligned}$$

Ostatecznie po (n-1) krokach otrzymujemy .

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & \cdots & a_{1k}^{(n-1)} & \cdots & a_{1n}^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & \cdots & a_{2k}^{(n-1)} & \cdots & a_{2n}^{(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(n-1)} & \cdots & a_{kn}^{(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_k \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \cdots \\ b_k^{(1)} \\ \cdots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

II. “Postępowanie odwrotne” .

$$(1) \quad x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

$$(n-p+1) \quad x_p = \frac{1}{a_{pp}^{(n-1)}} [b_p^{(n-1)} - \sum_{r=p+1}^n a_{pr}^{(n-1)} \cdot x_r]$$

$$(n) \quad x_1 = \frac{1}{a_{11}^{(n-1)}} [b_1^{(n-1)} - \sum_{r=2}^n a_{1r}^{(n-1)} \cdot x_r]$$

Zapis skrócony .

Dane : macierz współczynników $a_{ij}^{(0)}, i=1, \dots, n, j=1, \dots, n$

wektor współczynników $b_i^{(0)}, i=1, \dots, n$

Poszukujemy rozwiązania postaci wektora $x_i, i=1, \dots, n$.

I. Etap “eliminacja zmiennych”

k-ty krok , gdzie $k=1, \dots, n-1$

$$\left. \begin{aligned} a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} \\ b_i^{(k)} &= b_i^{(k-1)} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} i &= 1, \dots, k \\ j &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad \text{uwaga (*)}$$

$$\left. \begin{aligned} a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot a_{kj}^{(k-1)} \\ b_i^{(k)} &= b_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot b_k^{(k-1)} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} i &= k+1, \dots, n \\ j &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad \text{uwaga(**)}$$

II. Etap “postępowanie odwrotne”

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \quad \text{krok pierwszy}$$

$$x_p = \frac{1}{a_{pp}^{(n-1)}} [b_p^{(n-1)} - \sum_{r=p+1}^n a_{pr}^{(n-1)} x_r] \quad n-1 \text{ pozostałych kroków} \quad p=n-1, \dots, 1$$

Komentarz :

(*) Jeśli w programie wykonujemy modyfikację wg. Etapu “eliminacji zmiennych” używając tylko jednej macierzy A , wówczas operacji przypisania (*) nie trzeba w ogóle wykonywać.

(**) Obejmując wiersze od siebie , można ograniczyć nie tylko do $j \geq k$.gdyż w pozostałych przypadkach są to operacje typu “0-0” (wystarczy też tylko $j > k$, ale wówczas macierzy górno-trójkątnej już nie dostajemy)

Metoda Gaussa “skaluje” się jak N^3 (N liczba równań)

Uwagi !

Założmy , że otrzymaliśmy macierz a w następującej formie (po (1) kroku operacji)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Algorytmu wyżej opisanego nie można stosować , gdyż na przekątnej mamy 0 . Można go jednak stosować , jeśli zamienimy wiersze 2 i 3 (dotyczyć to może także wartości wektora B)

Częściowy wybór elementu podstawowego polega na wyszukiwaniu przed każdym krokiem eliminacji zmiennych największego co do modułu elementu $a_{rk}^{(k-1)}$ w ciągu elementów $a_{ik}^{(k-1)}$ ($i = k, k+1, \dots, n$) dla wszystkich kroków.

Po ustaleniu numeru r równania, w którym ten element występuje, wiersz o numerze r zamieniony jest miejscem z wierszem o numerze k .

Stosując metody eliminacji Gaussa można także obliczać macierz odwrotną A^{-1} .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & - & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & - & a_{24} \\ - & - & - & - \\ a_{41} & a_{42} & - & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & - & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & - & x_{24} \\ - & - & - & - \\ x_{41} & x_{42} & - & x_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & - & 0 \\ 0 & 1 & - & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & 1 \end{bmatrix}$$

potęgowanie względem macierzy A podczas eliminacji zmiennych jest identyczne jak podczas szukania pojedynczego wektora wartości x_i .

Jednak operacje na wektorze wartości b_i należy teraz zastąpić operacjami na macierzy b_{ij} .

Rozwiązanie cząstkowe układu równań liniowych metodą Gaussa.

$$\begin{cases} 1x_1 - 1x_2 + 2x_3 - 1x_4 = -8 \\ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 - 1x_4 = -8 \\ 1x_1 + 1x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \end{cases} \quad \text{rozwiązanie} \quad \begin{cases} x_1 = -7 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x_1 - 1x_2 + 2x_3 - 1x_4 = -8 \\ 0x_1 + 2x_2 - 1x_3 + 1x_4 = 6 \\ 0x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 1x_4 = 8 \\ 0x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 5x_4 = 18 \end{cases} \quad \begin{aligned} W_1^{(1)} &= W_1^{(0)} \\ W_2^{(1)} &= W_2^{(0)} - W_1^{(0)} \\ W_3^{(1)} &= W_3^{(0)} - 2W_1^{(0)} \\ W_4^{(1)} &= W_4^{(0)} - W_1^{(0)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 1x_1 - 1x_2 + 2x_3 - 1x_4 = -8 \\ 0x_1 + 2x_2 - 1x_3 + 1x_4 = 6 \\ 0x_1 + 0x_2 - 1x_3 - 1x_4 = -4 \\ 0x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 12 \end{cases} \quad \begin{aligned} W_1^{(2)} &= W_1^{(1)} \\ W_2^{(2)} &= W_2^{(1)} \\ W_3^{(2)} &= W_3^{(1)} - 2W_2^{(1)} \\ W_4^{(2)} &= W_4^{(1)} - W_2^{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 1x_1 - 1x_2 + 2x_3 - 1x_4 = -8 \\ 0x_1 + 2x_2 - 1x_3 + 1x_4 = 6 \\ 0x_1 + 0x_2 - 1x_3 - 1x_4 = -4 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases} \quad \begin{aligned} W_1^{(3)} &= W_1^{(2)} \\ W_2^{(3)} &= W_2^{(2)} \\ W_3^{(3)} &= W_3^{(2)} \\ W_4^{(3)} &= W_4^{(2)} - (-2)W_3^{(2)} \end{aligned}$$

Postępowanie odwrotne :

$$(1) \quad 2x_4=4 \quad x_4=2$$

$$(2) \quad -1x_3-1x_4=-4$$

$$x_3=-(-4x+1x_4)$$

$$x_3=-(-4+2)=2$$

$$(3) \quad 2x_2-1x_3+1x_4=6$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(6+1x_3-1x_4)$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(6+2-2) = 3$$

$$(4) \quad 1x_1-1x_2+2x_3-1x_4=-8$$

$$x_1 = -8+1x_2-2x_3+1x_4$$

$$x_1 = -8+3-4+2 = -7$$

[Burden] (po modyfikacji)

Przykład różnej dokładności w wynikowej dla różnych algorytmów :

ZADANIE [Fogiel]

Rozwiązać układ równań

$$x+400y=801$$

$$200x+200y=600$$

Stosując arytmetykę zmiennie pozycyjną z trzema cyframi znaczącymi (stosując zaokrąglania błędów).

Porównać otrzymane rozwiązanie z rozwiązaniem dokładnym .

$$x=1, y=2$$

Metoda pierwsza

$$1) \quad x+400y=801 \quad / \cdot (-200)$$

$$200x+200y=600$$

$$2) \quad -200x-80000y=-160200$$

pozostawiamy trzy cyfry zn.

$$200x+200y=600$$

$$-200x-80000y=-160000$$

dodajemy stronami

$$200x+200y=600$$

3) $-79800y = -159000$ pozostawiamy trzy cyfry zn

$$-7900y = -159000$$

$$y = 1.99$$

$$\begin{array}{r}
 1,992 \\
 \hline
 159000 : 79800 \\
 \hline
 79800 \\
 \hline
 792000 \\
 718200 \\
 \hline
 738000 \\
 718200 \\
 \hline
 198000 \\
 159600 \\
 \hline
 38400
 \end{array}$$

$$x + 400 \cdot 1,99 = 801$$

4) $x = 801 - 796$

$$x = 5,00$$

Otrzymujemy ostatecznie : $x=5,00$, $y=1,99$ (fatalnie !)

Metoda druga

1) $200x + 200y = 600$ po zamianie wierszy dzielimy przez (-200)

$$x + 400y = 801$$

2) $-x - y = -3$

$$x + 400y = 801$$
 dodajemy stronami

3) $399y = 798$

$$y = 2,00$$

4) $200x + 400 = 600$

$$200x = 200$$

$$x = 100$$

Ostatecznie dostajemy : $x=1,00$, $y=2,00$ (b.dobrze !)

Metoda pierwsza w teorii rozwiązywania układów równań liniowych nazywana jest metodą eliminacji Gaussa , metoda druga to metoda eliminacji Gaussa z częściowym wyborem elementu podstawowego.

Metoda rozkładu L - U :

Dokonuje się rozkładu pierwotnej macierzy A :

$$L \cdot U = A$$

gdzie L jest macierzą dolno-trójkątną , a U jest macierzą górno-trójkątną .

$$L = \begin{bmatrix} \diagup & & & \\ & \diagup & & \\ & & \diagup & \\ & & & \diagup \end{bmatrix}$$

elementy niezerowe tylko na dolnej diagonalu i powyżej

$$U = \begin{bmatrix} \diagup & & & \\ & \diagdown & & \\ & & \diagdown & \\ & & & \diagdown \end{bmatrix}$$

elementy niezerowe tylko górnej diagonalu i powyżej

czyli $(L \ U)X=B$

Znając L , U rozwiązujemy najpierw układ $L \cdot Y = B$

A następnie $UX=Y$,

Metoda faktoryzacji LU jest trudniejsza do programowania niż met. eliminacji Gaussa , ale efektywniejsza w różnych zastosowaniach .

Metoda eliminacji Jordana w uogólnieniu :

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \cdots & a_{2n}^{(0)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(0)} \\ \cdots \\ b_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$1) \quad A: \quad a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \quad j = 1, \dots, n \quad b_1^{(1)} = \frac{b_1^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$$

$$B: \quad \left. \begin{aligned} a_{ij}^{(1)} &= a_{il}^{(0)} - a_{i1}^{(0)} \cdot a_{1j}^{(1)} \\ b_i^{(1)} &= b_i^{(0)} - a_{i1}^{(0)} \cdot b_1^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} i &= 2, \dots, n \\ j &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$2) \quad A: \quad a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad j = k, \dots, n \quad b_n^{(1)} = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

$$B: \left. \begin{aligned} a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \cdot a_{kj}^{(k)} \\ b_i^{(k)} &= b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \cdot b_k^{(n)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} i &= 1, \dots, k-1, k+1, n \\ j &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$3) \quad A: \quad a_{nj}^{(n)} = \frac{a_{nj}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \quad b_n^{(n)} = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

$$B: \left. \begin{aligned} a_{ij}^{(n)} &= a_{ij}^{(n-1)} - a_{in}^{(n)} \cdot a_{nj}^{(n)} \\ b_i^{(n)} &= b_i^{(n-1)} - a_{in}^{(n-1)} \cdot b_n^{(n)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} i &= 1, \dots, n-1 \\ j &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

po k-krokach:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{k\text{-kroków w formie "0-1"}}$$

k -kroków w formie "0-1"

po n -krokach :

$$x_i = b_i^{(n)}$$

Częściowy wybór elementu podstawowego przeprowadzamy w metodzie Gaussa tj. w k -tym kroku porównujemy elementy w k -tej kolumnie , ale w wierszach $k+1, \dots, n$